

第3讲 正方形

一、菱形的判定

菱形的判定

1、定义法：有一组_____的_____是菱形. (边判定)
书写：

2、_____的_____是菱形. (对角线判定)
书写：

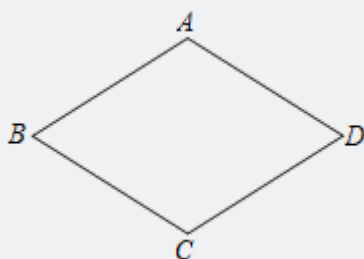
3、_____条边_____的_____是菱形. (边判定)
书写：

【教法备注】

菱形的判定：

(1) 定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形.

书写：

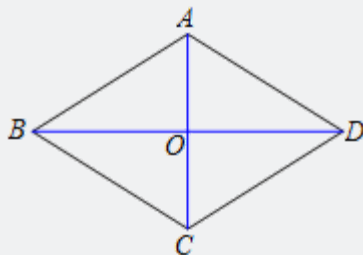


$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

书写：

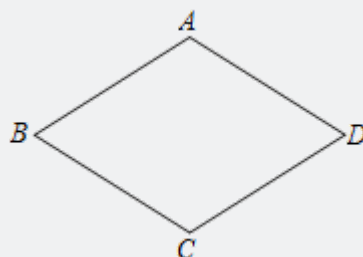


$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(3) 四边相等的四边形是菱形.

书写:



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 中 $AB = BC = CD = DA$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【总结】:

① 证明一个四边形是菱形, 一般情况下, 先证明它是一个平行四边形, 然后证明 “一组邻边相等” 或 “对角线互相垂直” 即可.

② 若直接证明一个四边形是菱形, 只要证明 “四条边相等” 即可.

③ 对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

④ 对角线平分一个内角的平行四边形是菱形 (平行 + 角平分线出等腰三角形).

|| 例题

1. 从下列条件中选择一个条件添加后, 还不能判定平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 则这个条件是 ().

A. $AC \perp BD$

B. $AD = CD$

C. $AB = BC$

D. $AC = BD$

【答案】 D

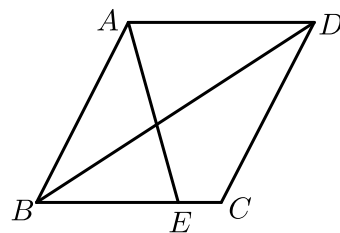
【解析】 菱形的性质中没有对角线相等, 所以无法判定. 故选 D.

【标注】 【知识点】菱形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2018~2019 学年 6 月天津武清区英华国际中学初二下学期月考第 6 题 3 分

2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上的一点，连结 AE 、 BD 且 $AE = AB$ ．若 $\angle AEB = 2\angle ADB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形．



【答案】证明见解析．

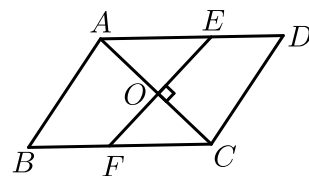
【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，
 $\therefore \angle ADB = \angle DBC$ ．
 又 $\because AE = AB$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle AEB$ ．
 又 $\because \angle AEB = 2\angle ADB$ ，
 $\therefore \angle ABE = 2\angle DBC = \angle ABD + \angle DBC$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，
 $\therefore \angle CBD = \angle ADB = \angle ABD$ ，
 $\therefore AB = AD$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形．

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2016~2017学年天津河西区初二下学期期中第22题

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中， O 是对角线 AC 的中点，过点 O 作 AC 的垂线与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F ．



- (1) 求证： $AE = CF$ ．
 (2) 连接 AF 、 CE ，判断四边形 $AFCE$ 的形状，并说明理由．

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 四边形 $AFCE$ 是菱形 , 理由见解析 .

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,

$$\therefore AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FCA ,$$

$\because O$ 为 AC 中点

$$\therefore AO = OC ,$$

$$\therefore EF \perp AC ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF ,$$

易证 $\text{Rt}\triangle AOE \cong \text{Rt}\triangle COF (\text{ASA})$.

$$\therefore AE = CF .$$

(2) 由 (1) 得 $AE = CF$,

$$\therefore AE \parallel CF ,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形 ,

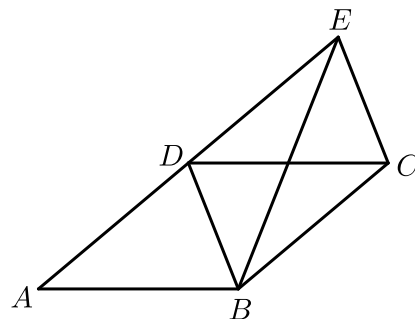
$$\therefore EF \perp AC ,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形 .

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

练习

4. 如图 , 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 , 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 连接 EB , EC , DB , 下列条件中 , 不能使四边形 $DBCE$ 成为菱形的是 () .



A. $AB = BE$

B. $BE \perp DC$

C. $\angle ABE = 90^\circ$

D. BE 平分 $\angle DBC$

【答案】A

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,

$$\therefore AD \parallel BC , AD = BC ,$$

又 $\because AD = DE$,

$\therefore DE \parallel BC$, 且 $DE = BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 为平行四边形,

A $\because AB = BE, DE = AD, \therefore BD \perp AE, \therefore$ 四边形 $DBCE$ 是矩形, 故本选项错误;

B $\because BE \perp DC, \therefore$ 对角线互相垂直的平行四边形为菱形, 故本选项正确;

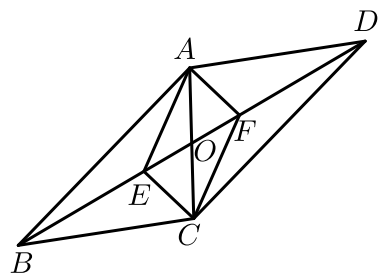
C $\because \angle ABE = 90^\circ, \therefore BD = DE, \therefore$ 邻边相等的平行四边形为菱形, 故本选项正确;

D $\because BE$ 是平分 $\angle DBC, \therefore$ 对角线平分对角的平行四边形为菱形, 故本选项正确.

故选: A.

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

5. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 在 BD 上, 且 $BE = DF$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

(2) 在不添加辅助线的情况下, 请你补充一个条件, 使得四边形 $AECF$ 是菱形, 并给予证明.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 补充的条件是: $AC \perp BD$; 证明见解析.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD, AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle CDF$.

又 $\because BE = DF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA = OC, OB = OD$.

$\because BE = DF$,

$\therefore OE = OF$,

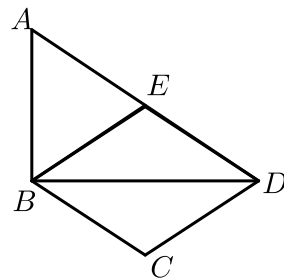
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形 .

又 $\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形 .

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

6. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, BD 为一条对角线, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $\angle ABD = 90^\circ$, E 为 AD 的中点, 连接 BE .



(1) 求证: 四边形 $BCDE$ 为菱形 .

(2) 连接 AC , 若 AC 平分 $\angle BAD$, $BC = 1$, 求 AC 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $AC = \sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because AD = 2BC$, E 为 AD 的中点 ,

$\therefore DE = BC$.

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形 .

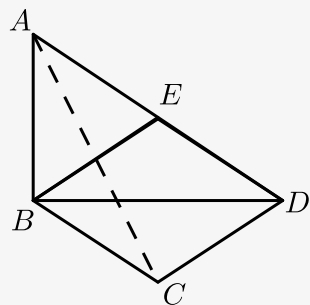
$\because \angle ABD = 90^\circ$, $AE = DE$,

$\therefore BE = DE$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为菱形 .

(2) $\because AD \parallel BC$, AC 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA$,



$\therefore AB = BC = 1$.

$$\because AD = 2BC = 2,$$

$$\therefore \sin \angle ADB = \frac{1}{2}, \angle ADB = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ, \angle ADC = 60^\circ.$$

$$\text{在Rt}\triangle ACD\text{中}, AD = 2, CD = 1, AC = \sqrt{3}.$$

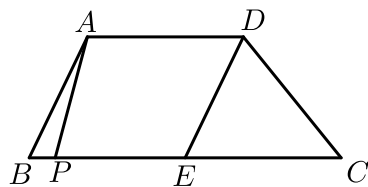
【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区初二下学期期末第20题8分

|| 例题

7. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 是 BC 的中点, $AD = 5$, $BC = 12$, $CD = 4\sqrt{2}$, $\angle C = 45^\circ$, 点 P 是 BC 边上一动点, 设 PB 的长为 x .



- (1) 当 x 的值为 _____ 时, 以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形为平行四边形.
- (2) 点 P 在 BC 边上运动的过程中, 以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形能否构成菱形? 试说明理由.

【答案】(1) 1或11

(2) 点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形构成菱形.

【解析】(1) 若四边形 $ADEP$ 为平行四边形, 则 $AD = PE = 5$, 可推出 $x = 1$;

若四边形 $ADPE$ 为平行四边形, 则 $AD = EP = 5$, 可推出 $x = 11$.

(2) 由(1)知, 当 $BP = 11$ 时, 以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形为平行四边形,

$$\therefore EP = AD = 5,$$

过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F , 则 $DF = FC = 4$,

$$\therefore FP = 3,$$

$$\therefore DP = \sqrt{FP^2 + DF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore EP = DP$, 故此时平行四边形是菱形,

以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形构成菱形.

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

练习

8. 已知，矩形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD ， BC 于点 E 、 F ，垂足为 O 。

(1) 如图1，连接 AF ， CE 。求证：四边形 $AFCE$ 为菱形。

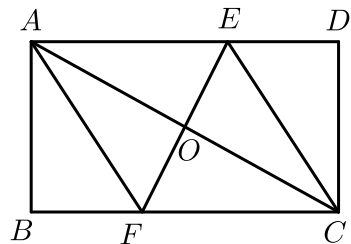


图1

(2) 如图1，求 AF 的长。

(3) 如图2，动点 P 、 Q 分别从 A 、 C 两点同时出发，沿 $\triangle AFB$ 和 $\triangle CDE$ 各边匀速运动一周，即点 P 自 $A \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow A$ 停止，点 Q 自 $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$ 停止。在运动过程中，点 P 的速度为每秒 1cm 。点 Q 的速度为每秒 0.8cm 。设运动时间为 t 秒，若当 A 、 P 、 C 、 Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，直接写出 t 的值。

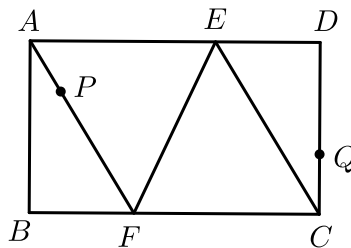


图2

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 5。

(3) $\frac{20}{3}$ 。

【解析】(1) $\because$ 矩形 $ABCD$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ 。

$\therefore \angle CAD = \angle ACB$ ， $\angle AEF = \angle CFE$ 。

$\because EF$ 垂直平分 AC ，

$\therefore OC = OA$ 。

在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle ACB \\ \angle AEF = \angle CFE \\ OA = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{AAS})$ 。

$$\therefore OE = OF .$$

$$\therefore EF \perp AC ,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形，即四边形 $AFCE$ 为平行四边形 .

(2) 设菱形的边长 $AF = CF = x\text{cm}$ ，则 $BF = (8 - x)\text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $AB = 4\text{cm}$.

$$16 + (8 - x)^2 = x^2 ,$$

$$x = 5 .$$

$$\therefore AF = 5 .$$

(3) P 点在 AF 上， Q 点在 CD 上，此时 A 、 C 、 P 、 Q 四点不能构成平行四边形 .

同理 P 点在 AB 上， Q 点在 DE 或 CE 上，也不能构成平行四边形 .

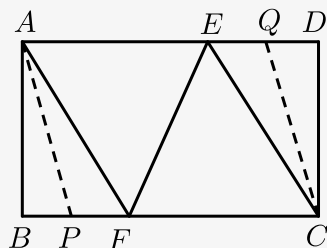
$\therefore$ 只有当 P 点在 BF 上， Q 点在 ED 上时，才能构成平行四边形 .

$\therefore$ 以 A 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时， $PC = QA$.

$$\therefore PC = t , QA = 12 - 0.8t .$$

$$\therefore t = 12 - 0.8t , t = \frac{20}{3} .$$

$\therefore$ 以 A 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形， $t = \frac{20}{3}$ 秒 .

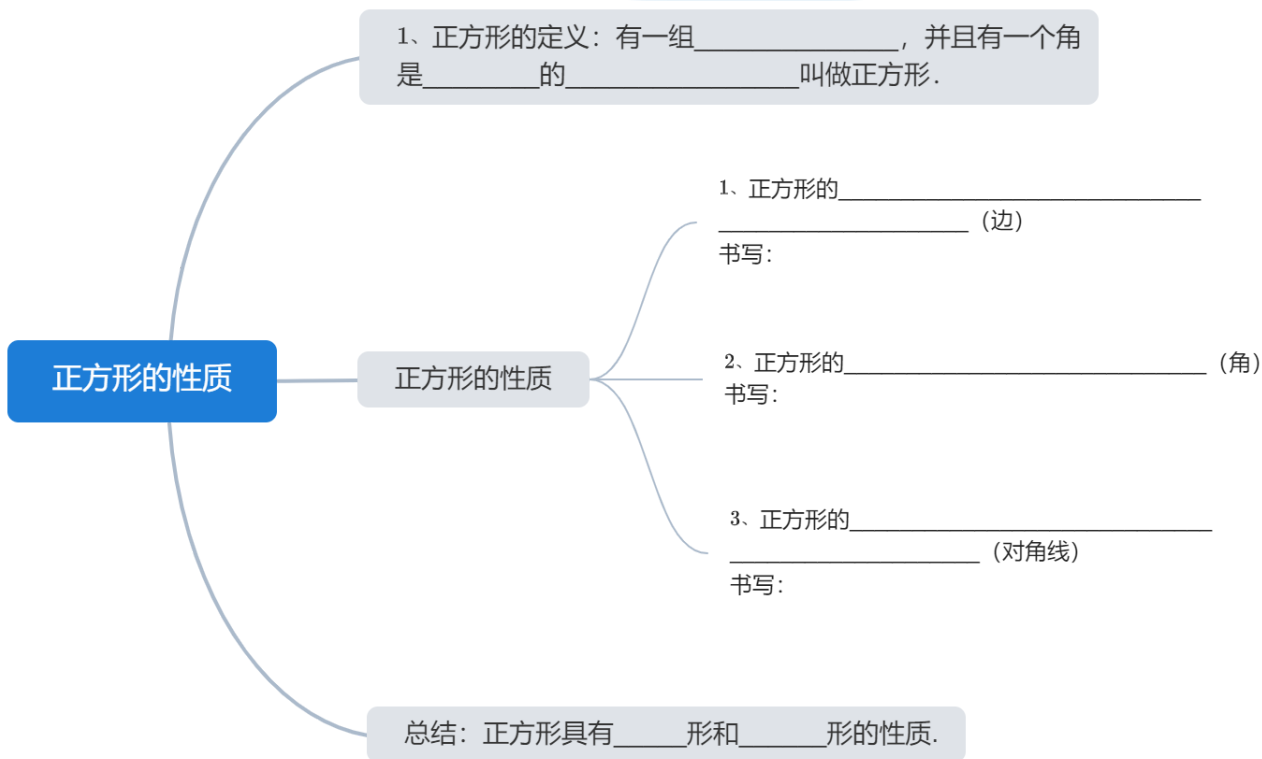


【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期末第24题10分

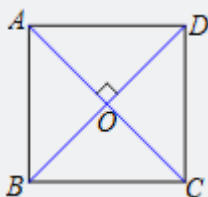
二、正方形的性质



【教法备注】

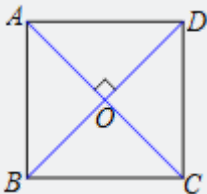
1、正方形的定义：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形。

正方形 $ABCD$



2、正方形的性质：

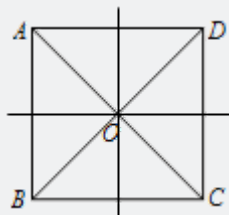
正方形是特殊的平行四边形，既是矩形，又是菱形，因此它具有前三者的所有性质。

图形	性质		符号表示
正方形 $ABCD$ 	边	正方形的四条边都相等 正方形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	正方形的四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD =$ $\angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	正方形的对角线相等且 互相垂直平分 正方形的每一条对角线 平分一组对角	$AC = BD, AC \perp BD$ $OA = OC = OB = OD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

3、正方形的对称性：正方形是中心对称图形，也是轴对称图形．

对称性：正方形既是中心对称图形，也是轴对称图形．

正方形有4条对称轴，是对角线所在的直线以及是过连接对边中点的直线．



全等三角形有：

$\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle ADC \cong \triangle BCD$,

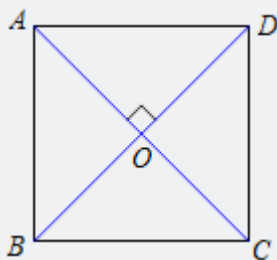
$\triangle AOB \cong \triangle COD \cong \triangle AOD \cong \triangle COB$.

图中所有三角形都是等腰直角三角形．

4、正方形的周长和面积：

(1) 正方形的周长：边长的4倍．如图，周长 $C = 4AB$.

(2) 正方形的面积：①边长的平方．②对角线平方的一半．（对角线垂直的四边形的面积求法）



|| 例题

9. 正方形面积为36，则对角线的长为（ ）。

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. 9

D. $9\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】设对角线长是 x ，则有 $\frac{1}{2}x^2 = 36$ ，

解得： $x = 6\sqrt{2}$ 。

故选B。

【标注】【知识点】正方形的性质

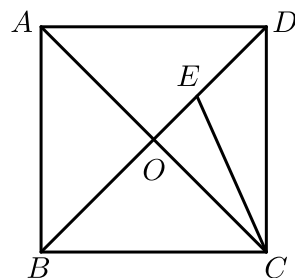
10. 如图，正方形 $ABCD$ 的两条对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 在 BD 上，且 $BE = CD$ ，则 $\angle BEC$ 的度数为（ ）。

A. 22.5°

B. 60°

C. 67.5°

D. 75°



【答案】C

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC = CD$ ， $\angle DBC = 45^\circ$ ，

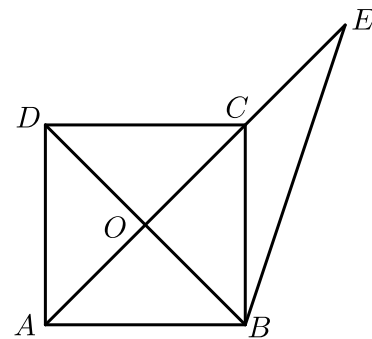
$\because BE = CD$ ，

$\therefore BE = BC$ ，

$\therefore \angle BEC = \angle BCE = (180^\circ - 45^\circ) \div 2 = 67.5^\circ$ 。

【标注】【知识点】正方形的性质

11. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$ ，对角线 AC ， BD 交于点 O ， E 是 AC 延长线上一点，且 $CE = CO$ ，则 BE 的长度为（ ）。



A. $\sqrt{3}$

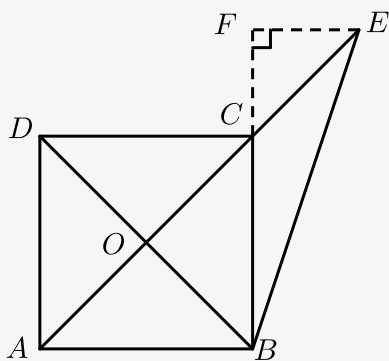
B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】



延长 BC ，过 E 作 $EF \perp BC$ 交 BC 的延长线于 F ，

$\because$ 正方形的边长为 $\sqrt{2}$ ，

$\therefore OA = OC = CE = 1$ ，

$CF = CE \cdot \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$ 。

故选C。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】正方形的性质

【知识点】勾股定理

【知识点】直接用勾股求边长

【思想】数形结合思想

【方法】图象法

练习

12. 正方形的一条对角线长为4，则这个正方形的面积是（ ）。

A. 8

B. $4\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$

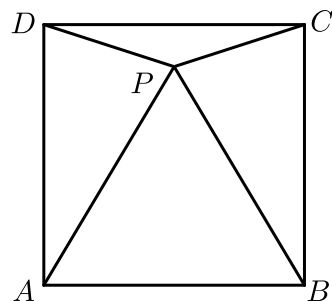
D. 16

【答案】 A

【解析】 $\because$ 正方形的一条对角线长为4, $\therefore$ 这个正方形的面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

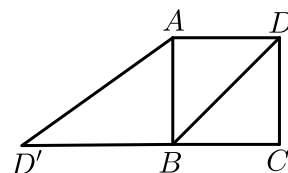
【标注】 【知识点】 正方形的周长与面积

13. 如图, 已知 P 是正方形 $ABCD$ 内的一点, 且 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 那么 $\angle DCP = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 15° 【解析】 15°

【标注】 【知识点】 已知一角求其余两角; 等腰三角形的性质-等边对等角

14. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2, 如果将对角线 BD 绕着点 B 旋转后, 点 D 落在 CB 延长线上的 D' 处, 那么 AD' 的长为 ().

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{7}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为2,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $BD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $BD' = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore AD' = \sqrt{AB^2 + BD'^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

故选A.

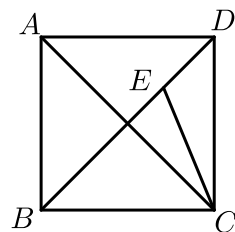
【标注】【能力】运算能力

【知识点】正方形的性质

【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】勾股定理

15. 如图，已知正方形 $ABCD$ 边长为1，连接 AC ， BD ， CE 平分 $\angle ACD$ 交 BD 于点 E ，则 DE 长为（ ）。



A. $2\sqrt{2} - 2$

B. $\sqrt{3} - 1$

C. $\sqrt{2} - 1$

D. $2 - \sqrt{2}$

【答案】C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore BC = CD = 1, \angle BCD = 90^\circ, \angle ACD = 45^\circ = \angle BDC = \angle ACB,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2},$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$ ，

$$\therefore \angle ACE = \angle DCE = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BDC + \angle DCE,$$

$$\therefore \angle BEC = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE,$$

$$\therefore BE = BC = 1,$$

$$\therefore DE = BD - BE = \sqrt{2} - 1,$$

故选C。

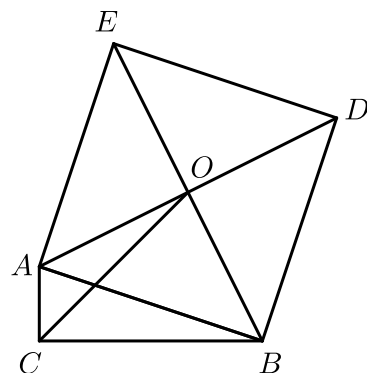
【标注】【知识点】正方形的性质

独步天下

例题

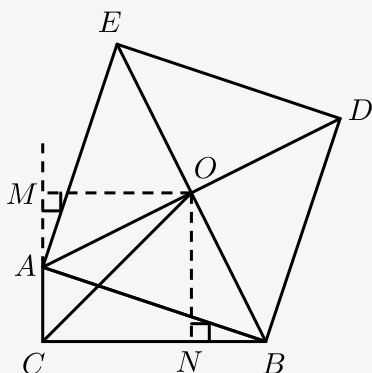
16.

如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $OC = 6\sqrt{2}$ ，则另一直角边 BC 的长为_____。



【答案】 9

【解析】 如图所示，



过点 O 作 $OM \perp CA$ ，交 CA 的延长线于点 M ；过点 O 作 $ON \perp BC$ 于点 N 。

易证 $\triangle OMA \cong \triangle ONB$ ，

$\therefore OM = ON$ ， $MA = NB$ 。

$\therefore O$ 点在 $\angle ACB$ 的平分线上。

$\therefore \triangle OCM$ 为等腰直角三角形。

$\therefore OC = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore CM = ON = 6$ 。

$\therefore MA = CM - AC = 3$ ，

$\therefore BC = CN + NB = 6 + 3 = 9$ 。

【标注】【能力】推理论证能力

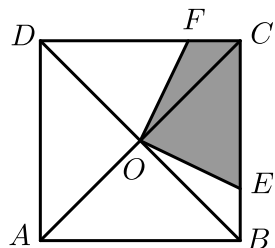
【能力】运算能力

【知识点】正方形的性质

【重点强调】

练习

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， E 是 BC 边上的一个动点， $OF \perp OE$ 交 CD 于点 F ，则四边形 $OECF$ 的面积是（ ）。



A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore OC = OB, AC \perp BD, \angle OCF = \angle OBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle COE + \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EOF = \angle COE + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COF = \angle BOE,$$

在 $\triangle COF$ 和 $\triangle BOE$ 中,

$$\begin{cases} \angle OCF = \angle OBE \\ OC = OB \\ \angle COF = \angle BOE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle COF \cong \triangle BOE (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\triangle COF} = S_{\triangle BOE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OECF} = S_{\triangle COF} + S_{\triangle COE}$$

$$= S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COE}$$

$$= S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}$$

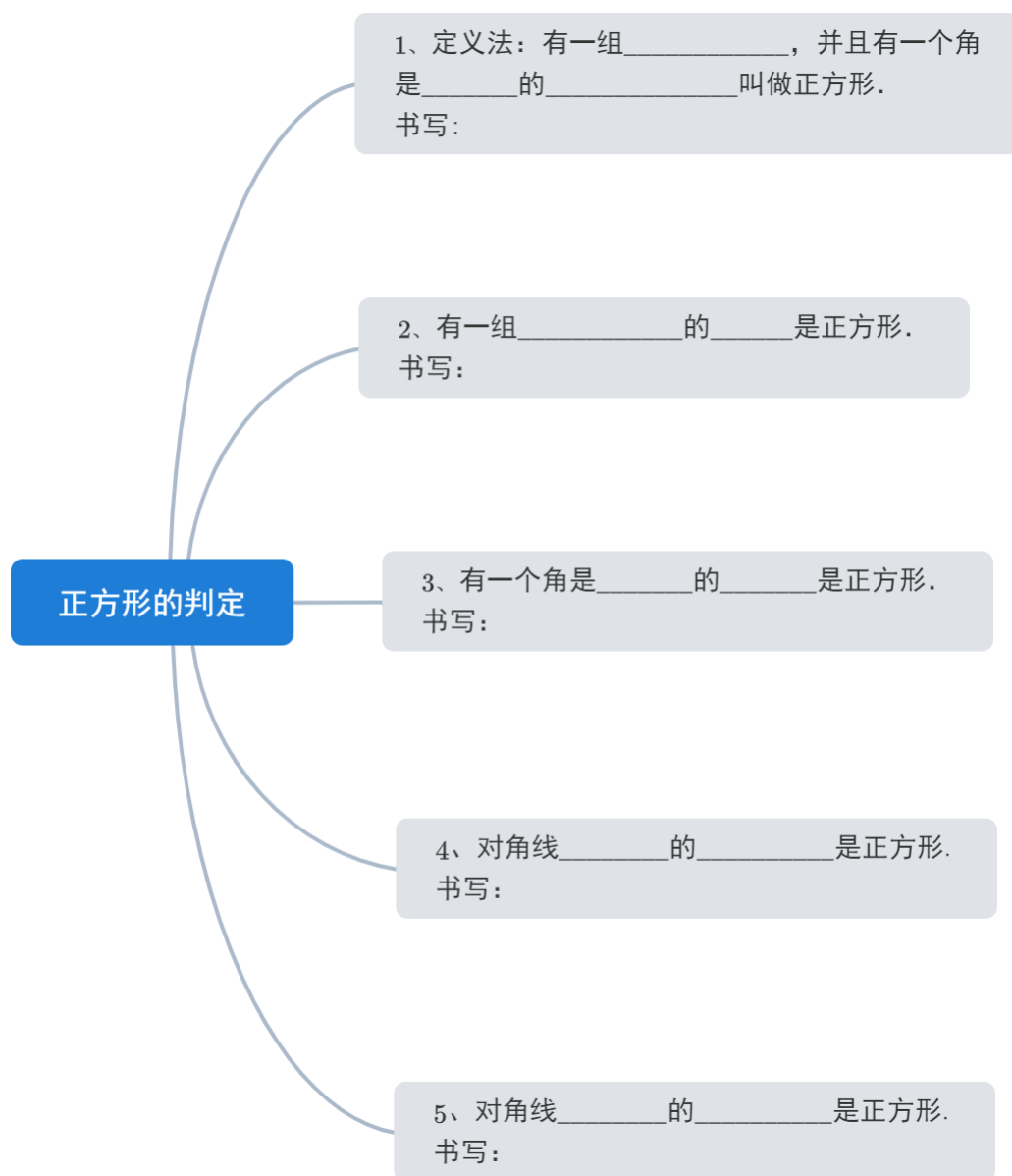
$$= \frac{1}{4} \times 2 \times 2$$

$$= 1.$$

【标注】 【知识点】 正方形与全等综合

【重点强调】

三、正方形的判定



【教法备注】

课本中没有明确给出正方形的判定定理，但是我们可以通过正方形的性质入手利用平行四边形、矩形、菱形进行判定。

正方形的判定：

(1)定义法：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形。

(2)有一组邻边相等的矩形是正方形。

- (3)有一个角是直角的菱形是正方形.
- (4)对角线垂直的矩形是正方形.
- (5)对角线相等的菱形是正方形.

例题

18. 在四边形 $ABCD$ 中, O 是对角线的交点,下列条件能判定这个四边形是正方形的是()

- A. $AC = BD, AB \parallel CD, AB = CD$ B. $AD \parallel BC, \angle A = \angle C$
- C. $AO = BO = CO = DO, AC \perp BD$ D. $AO = CO, BO = DO, AB = BC$

【答案】C

【解析】A 选项:不能,只能判定为矩

形;

B 选项:不能,只能判定为平行
四边形;

C 选项:能;

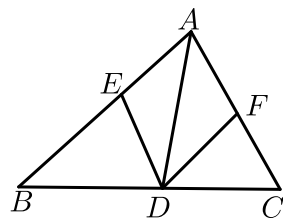
D 选项:不能,只能判定为菱
形,

故选 C.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】正方形的判定

19. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 、 CA 上,且 $DE \parallel CA$, $DF \parallel BA$. 下列结论:①四边形 $AEDF$ 是平行四边形;②如果 $\angle BAC = 90^\circ$,那么四边形 $AEDF$ 是矩形;③如果 AD 平分 $\angle BAC$,那么四边形 $AEDF$ 是菱形;④如果 $\angle BAC = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$,那么四边形 $AEDF$ 是正方形,你认为正确的是().



- A. ①②③④ B. ①②③ C. ①②④ D. ②③④

【答案】A

【解析】A.

【标注】【知识点】正方形的判定

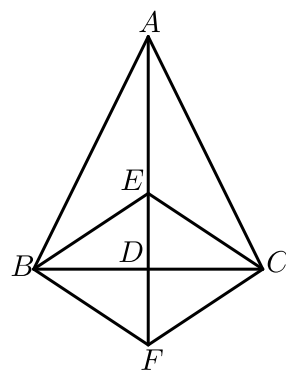
【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】菱形的判定-从四边形

【知识点】平行线的性质

【能力】推理论证能力

20. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，点 E 是 AD 上一点，过点 B 作 $BF \parallel EC$ ，交 AD 的延长线于点 F ，连接 BE ， CF 。



(1) 求证： $\triangle BDF \cong \triangle CDE$ 。

(2) 当 ED 与 BC 满足什么数量关系时，四边形 $BECF$ 是正方形？请说明理由。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 当 $DE = \frac{1}{2}BC$ 时，四边形 $BECF$ 是正方形，证明见解析。

【解析】(1) $\because AD$ 是中线，

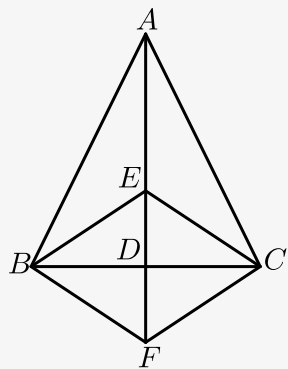
$$\therefore BD = CD,$$

$$\because BF \parallel CE,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle DCE,$$

$$\text{又} \because \angle BDF = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE.$$



(2) 当 $DE = \frac{1}{2}BC$ 时, 四边形 $BECF$ 是正方形,

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore BF = CE, DE = DF,$$

$$\text{又} \because BF \parallel CE,$$

$$\therefore \text{四边形 } BECF \text{ 是平行四边形},$$

$$\because AB = AC, AD \text{ 是中线},$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore EF \perp BC,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } BECF \text{ 是菱形}.$$

$$\because DE = \frac{1}{2}BC, DE = DF = \frac{1}{2}EF,$$

$$\therefore EF = BC.$$

$$\therefore \text{菱形 } BECF \text{ 是正方形}.$$

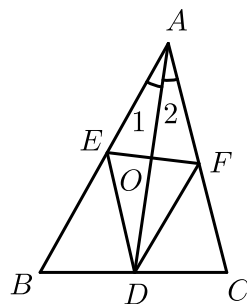
【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

【知识点】SAS

【知识点】正方形的判定

【能力】推理论证能力

21. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 线段 AD 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 E 、 F , 连接 DE 、 DF .



(1) 试判定四边形 $AEDF$ 的形状, 并证明你的结论.

(2) 若 $AE = 5$, $AD = 8$, 求 EF 的长 .

(3) 直接写出 $\triangle ABC$ 满足什么条件时 , 四边形 $AEDF$ 是正方形 ?

【答案】 (1) 菱形 ; 证明见解析 .

(2) 6 .

(3) $\angle BAC = 90^\circ$.

【解析】 (1) $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 ,$$

$\because EF$ 垂直平分 AD ,

$$\therefore AE = DE , AF = DF ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle EDA , \angle 2 = \angle FDA ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ADF , \angle 2 = \angle ADE ,$$

$$\therefore AE \parallel DF , AF \parallel DE ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形 ,

$$\therefore AE = DE ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AEDF$ 为菱形 .

(2) $\because$ 四边形 $AEDF$ 为菱形 ,

$\therefore AD \perp EF$, AO 与 EF 互相平分 ,

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ ,$$

$$AO = DO , EO = FO ,$$

$$\because AD = 8 ,$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AD = 4 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中 ,

$$\therefore EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = 3 ,$$

$$\therefore EF = 2EO = 6 .$$

(3) 当 $\angle BAC = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 为直角三角形时 , 四边形 $AEDF$ 是正方形 .

【标注】 【知识点】菱形的判定-从四边形

【重点强调】

2017~2018 学年 4 月天津河西区天津市培杰中学初二下学期月考第 23 题 8 分

 练习

22. 下列命题正确的是 () .

- A. 有一组邻边相等的平行四边形是正方形 B. 有一个角是直角的平行四边形是正方形
C. 对角线相等的菱形是正方形 D. 对角线互相平分的矩形是正方形

【答案】 C

【解析】 A 选项：有一组邻边相等的平行四边形是菱形，故A错误；
B 选项：有一个角是直角的平行四边形是矩形，故B错误；
C 选项：对角线相等的菱形是正方形，故C正确；
D 选项：对角线互相垂直的矩形是正方形，故D错误。
故选 C .

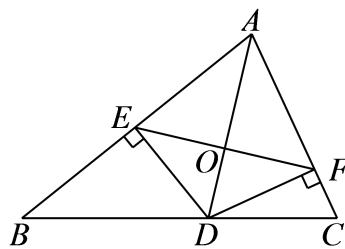
【标注】 【能力】 推理论证能力

【知识点】 正方形的性质

【知识点】 正方形的判定

23. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， DE ， DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高，得到下面四个结论：

- ① $OA = OD$ ；② $AD \perp EF$ ；③当 $\angle A = 90^\circ$ 时，四边形 $AEDF$ 是正方形；④ $AE^2 + DF^2 = AF^2 + DE^2$. 其中正确的是 () .



- A. ②③ B. ②④ C. ②③④ D. ①③④

【答案】 C

【解析】 易知 $\triangle AED \cong \triangle AFD$ (HL) ,
当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，四边形 $AEDF$ 是矩形，
又 $DE = DF$ ，可知四边形 $AEDF$ 是正方形，
 AD 垂直平分 EF ，

故 $AD \perp EF$,

由于 $AE = AF$, $DE = DF$,

则 $AE^2 + DE^2 = AF^2 + DF^2$,

那么 $AD^2 + DF^2 = AF^2 + DE^2$.

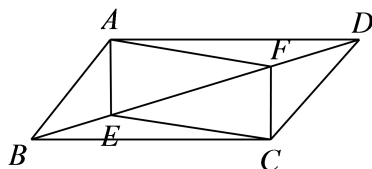
【标注】【知识点】正方形的判定

【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】HL

【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

24. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 为对角线 BD 上两点, $BE = DF$, 连接 AE 、 EC 、 CF 、 FA .



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

(2) 若 $AB = AD$, 求证: 四边形 $AECF$ 为菱形.

(3) 在(2)的条件下, 连接 AC 交 BD 于点 O , 若 $AB : BE : AO = 5 : 1 : 3$. 求证: 四边形 $AECF$ 为正方形.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 连接 AC 交 BD 于 O .

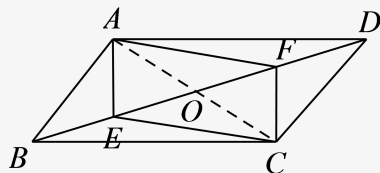
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore OA = OC$, $OB = OD$.

$\because BE = DF$.

$\therefore OE = OF$, $OA = OC$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.



(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = AD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

$\therefore AC \perp BD$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形, $AC \perp EF$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

(3) 在 (2) 的条件下 $\angle AOB = 90^\circ$.

$\therefore AB : BE : AO = 5 : 1 : 3$.

设 $AB = 5k$, 则 $AO = 3k$, $BE = k$.

由勾股定理得 $BO = 4k$.

$\therefore EO = BO - BE = 3k$.

$\therefore AO = EO$.

$\therefore AO = EO = OF$.

$\therefore \angle OAE = \angle OEA = 45^\circ$, $\angle OAF = \angle OFA = 45^\circ$.

$\therefore \angle EAF = \angle OAE + \angle OAF = 90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是正方形.

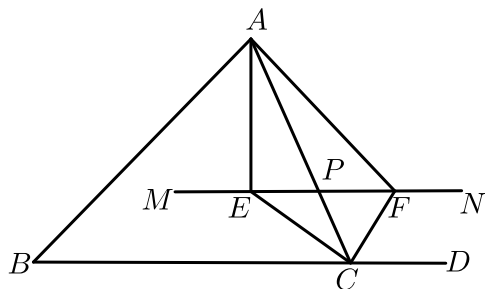
【标注】【知识点】菱形的判定及应用

【知识点】正方形的判定

【知识点】平行四边形的判定及应用

【能力】推理论证能力

25. 如图, $\triangle ABC$ 中, $MN \parallel BD$ 交 AC 于 P , $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 的平分线分别交 MN 于 E 、 F .



(1) 求证: $PE = PF$.

(2) 当 MN 与 AC 的交点 P 在什么位置时, 四边形 $AECF$ 是矩形, 说明理由.

(3) 在 (2) 的条件下, 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 四边形 $AECF$ 是正方形. (不需要证明)

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 当 P 是 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形 .

(3) 当 $AC \perp BC$ 时, 即 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 四边形 $ADCE$ 是正方形 .

【解析】 (1) $\because CE$ 平分 $\angle ACB$, CF 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACE = \angle BCE, \angle ACF = \angle DCF,$$

$$\text{又} \because MN \parallel BD,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle PCE = \angle BCE,$$

$$\therefore PE = PC,$$

$$\angle PFC = \angle FCD = \angle PCF,$$

$$\therefore PF = PC,$$

$$\therefore PE = PC = PF,$$

$$\therefore PE = PF.$$

(2) 当 P 是 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形,

$$\therefore PA = PC, PF = PC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\therefore PE = PC,$$

$\therefore AC = EF$, 四边形 $AECF$ 是矩形 .

(3) 当 $AC \perp BC$ 时, 即 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 四边形 $ADCE$ 是正方形,

$$\therefore \angle BCA = 90^\circ, EF \parallel DB,$$

$$\therefore \angle EPO = 90^\circ,$$

则 $EF \perp AC$,

$\therefore$ 矩形 $AECF$ 是正方形 .

【标注】【知识点】矩形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2017~2018学年天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期期中第23题